Kurvendiskussion

E2
15/16
1/4

$f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x$

1) Ableitung

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$ } Keine Einschränkung

$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot 5x^4 - \frac{4}{3} \cdot 3x^2 + 6$ ✓

$f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$ ~~0~~

$f''(x) = 2x^3 - 8x$ 0,5

$f'''(x) = 6x^2 - 8$ 0,5

2

---

2) Symmetrie:

Da der Funktionsterm nur ungerade Exponenten enthält, ✓ ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung. ✓

2

3.) Nullstellen:

$f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{10} \cdot x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x$

$0 = x\left(\frac{1}{10}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 6\right)$ ✓

$\Rightarrow x_1 = 0$ ✓ oder $\frac{1}{10}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 6 = 0 \quad | \cdot 10$

$x^4 - \frac{40}{3}x^2 + 60 = 0$

Lösung entweder über biquadratische Gleichung oder mit Polynomdivision:

biquadratische Gleichung:

$z = x^2$ ✓

$\Rightarrow z^2 - \frac{40}{3}z + 60 = 0$ ✓

p-q-F.: $p = -\frac{40}{3}$ $q = 60$

$z_{1,2} = -\frac{\left(-\frac{40}{3}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{40}{3}}{2}\right)^2 - 60}$

$= +\frac{20}{3} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{400}{9} - 60}_{= -\frac{140}{9} < 0}}$ ✓

$\Rightarrow$ nicht lösbar!

$x = 0$ einzige NST. ✓

6

Probieren:

$x = -2 \Rightarrow (-2)^4 - \frac{40}{3} \cdot (-2)^2 + 60 = 22\frac{2}{3} \neq 0$

$x = -1 \Rightarrow (-1)^4 - \frac{40}{3}(-1)^2 + 60 = 47\frac{2}{3} \neq 0$

$x = 1 \Rightarrow 1^4 - \frac{40}{3} \cdot 1^2 + 60 = 47\frac{2}{3} \neq 0$

$x = 2 \Rightarrow 2^4 - \frac{40}{3} \cdot 2^2 + 60 = 22\frac{2}{3} \neq 0$

$x = 3/-3 \Rightarrow 3^4 - \frac{40}{3} \cdot 3^2 + 60 = 21 \neq 0$

$x = 4/-4 \Rightarrow 4^4 - \frac{40}{3} \cdot 4^2 + 60 = 102\frac{2}{3} \neq 0$

$\Rightarrow$ Keine weitere NST durch Probieren gefunden.

$x = 0$ einzige NST!

Keine echt mathematische Lösung, da es auch nicht ganzzahlige Lösungen gibt.

E2
15/16
2/4

Kurvendiskussion

4. Verhalten für $|x| \to \infty$

Da der Summand mit dem höchsten Exponenten „$\frac{1}{10}x^5$“ ist, gilt:

wg. $a_n = \frac{1}{10} > 0$ und $n = 5$ ungerade

$$\left.\begin{array}{l} x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty \\ x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

4

5. Extremstellen

notwendige Bedingung f. Extremstellen: $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$$

Lösung über biquadratische Gleichung

biquadratische Gleichung:

$z = x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}z^2 - 4z + 6 = 0 \quad | \cdot 2$

$z^2 - 8z + 12 = 0$

$p = -8 \quad , \quad q = +12$

$$\Rightarrow z_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\underbrace{(-4)^2 - 12}_{\begin{array}{l}= 16 - 12 \\ = 4\end{array}}}$$

$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow z_1 = 4 + 2 = 6 \\ z_2 = 4 - 2 = 2 \end{array}\right\}$$

Aus $z_1 \Rightarrow x_{1,2}^2 = 6 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = \sqrt{6}$

$x_2 = -\sqrt{6}$

Aus $z_2 \Rightarrow x_{3,4}^2 = 2 \quad | \sqrt{\ }$

$x_3 = \sqrt{2}$

$x_4 = -\sqrt{2}$

hinreichende Bedingung:

$f''(+\sqrt{6}) = 2 \cdot (\sqrt{6})^3 - 8 \cdot \sqrt{6} \approx 9{,}798 > 0 \Rightarrow TP$

$f''(-\sqrt{6}) \approx -9{,}798 < 0 \Rightarrow HP$

$f''(+\sqrt{2}) = -5{,}657 < 0 \Rightarrow HP$

$f''(-\sqrt{2}) \approx 5{,}657 > 0 \Rightarrow TP$

Kurvendiskussion

E2
15/16
3/4

y-Koordinate:

$f(+\sqrt{6}) \approx -3,919 \Rightarrow TP(+\sqrt{6} \mid 3,92)$

$f(-\sqrt{6}) \approx -3,919 \Rightarrow HP(-\sqrt{6} \mid -3,92)$

$f(+\sqrt{2}) \approx +5,28 \Rightarrow HP(+\sqrt{2} \mid +5,28)$

$f(-\sqrt{2}) \approx -5,28 \Rightarrow TP(-\sqrt{2} \mid -5,28)$

8

---

6. Wendestellen:

notwendige Bedingung für WP: $f''(x) = 0$

$0 = 2x^3 - 8x$

$0 = x \cdot (2x^2 - 8)$

$\Rightarrow x_1 = 0$ oder $2x^2 - 8 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = +2$

$x_3 = -2$

hinreichende Bedingung für WP: $f'''(x_W) > 0 \Rightarrow$ L-R-WP

$f'''(x_W) < 0 \Rightarrow$ R-L-WP

$f'''(2) = 6 \cdot 2^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow$ R-L-WP (zwischen HP u. TP)

$f'''(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow$ R-L-WP (" " " ")

$f'''(0) = 6 \cdot 0^2 - 8 = -8 < 0 \Rightarrow$ L-R-WP (zwischen TP u. HP)

$\Rightarrow$ y-Koordinaten:

$f(-2) = \frac{1}{10}(-2)^5 - \frac{4}{3}(-2)^3 + 6 \cdot (-2) \approx -4,533 \Rightarrow WP_1(-2 \mid \approx -4,533)$

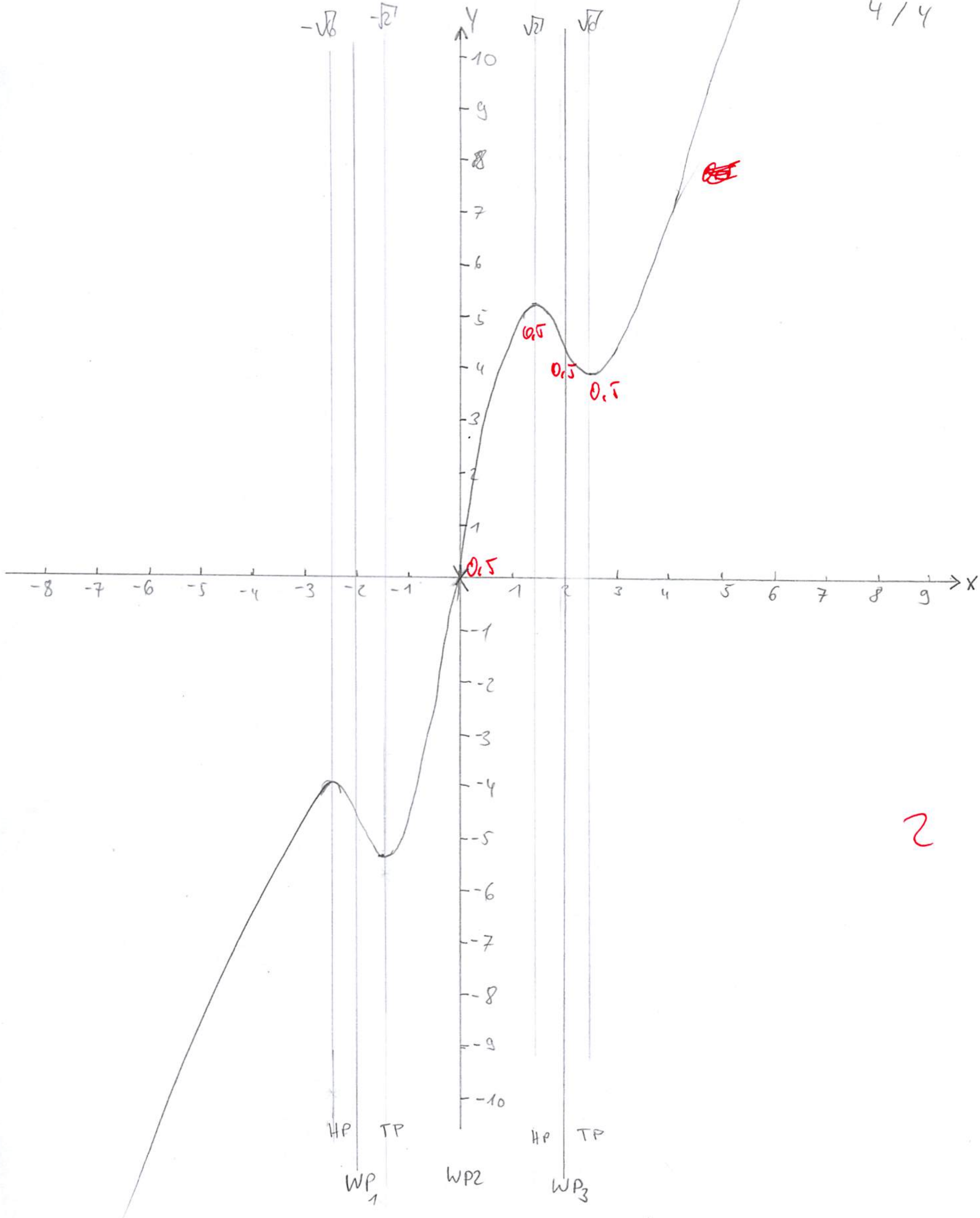
$f(0) = 0 \Rightarrow WP_2(0 \mid 0)$

$f(+2) \approx +4,533 \Rightarrow WP_3(+2 \mid \approx 4,533)$

6

8. Graph

E2
15/16
4/4



2