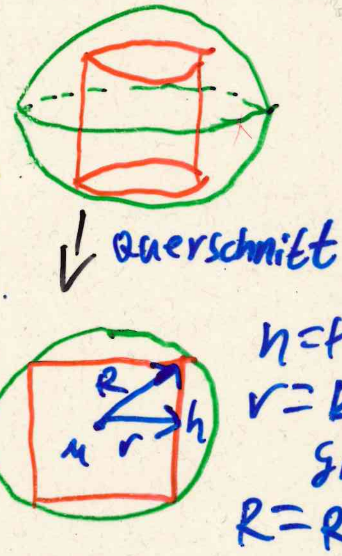
Buch S. 177 Aufgabe 25

Aus einer Kugel soll ein Prisma mit möglichst großem Flächeninhalt entstehen



h = Höhe Zylinder
r = Radius Zylinder Grundfläche
R = Radius Kugel

Hauptbedingung

Volumen eines Zylinders

$V = \pi r^2 \cdot h \quad (1)$

Nebenbedingung

Zusammenhang aus der Zeichnung

$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$ Satz des Pythagoras!

$\Rightarrow r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$ Einsetzen in (1)

Zielfunktion

$V(h) = \left(\pi R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \pi\right) h = h\pi R^2 - \frac{h^3\pi}{4}$

Extremwert der Zielfunktion

$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 \; ; \; V''(h) = -\frac{6}{4}\pi h$

$V'(h_e) = 0 \; ;$ Maximum $V''(h_{ex}) < 0$

$0 = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 \quad | + \frac{3}{4}\pi h^2$

$\frac{3}{4}\pi h^2 = \pi R \quad | : \frac{3}{4}\pi$

$h^2 = \frac{4}{3}R^2 \quad | \sqrt{\ }$

$h_{ex} = \frac{2}{\sqrt{3}} R$

Hochpunkt überprüfen

$V''(h_{ex}) = -\frac{6}{4}\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} R$

Produkt ist negativ $\Rightarrow$ Hochpunkt

Den Radius berechnen

$r^2 = R^2 - \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}R}{2}\right)^2$

$r^2 = R^2 - \frac{4}{12}R^2$

$r^2 = R^2\left(1 - \frac{4}{12}\right) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$

Ergebnis

Das Volumen des Zylinders wird also für

$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\, R$ und $h = \frac{2}{\sqrt{3}} R$ maximal

$r = \frac{\sqrt{6}}{3} R \qquad h = \frac{2}{3}\sqrt{3}\, R$

$V_{max} = \pi \cdot \frac{2}{3} R^2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}\, R = \pi \frac{4}{9} \cdot R^3 \sqrt{3}$