1.4 Von quadratischen Funktionen zu Potenzfunktionen

Was dich erwartet

Funktionen sind uns bereits in vielfältiger Form begegnet. Besonders intensiv haben wir uns mit linearen und quadratischen Funktionen beschäftigt und diese zur Lösung vielfältiger Probleme eingesetzt. Eine weitere wichtige Klasse von Funktionen sind die Potenzfunktionen. Potenzfunktionen sind Funktionen mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^r$. Einige Vertreter dieser Funktionsklasse hast du bereits kennen gelernt:

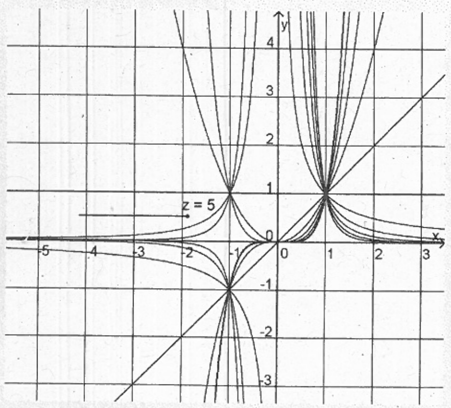
Für $r = 1$ erhält man $f(x) = x$, für $r = 2$ die Funktion $f(x) = x^2$.

Es gibt aber auch seltsame Potenzfunktionen, z. B. $f(x) = x^{0,425}$. In diesem Fall ist der Exponent r eine Dezimalzahl. Was dies bedeutet und wie die zugehörigen Graphen aussehen, ist Thema dieses Lernabschnitts.

> Aus einem Biologiebuch: „Die Körperoberfläche O(m) in Quadratmeter eines Menschen mit der Masse m in Kilogramm und der Länge von 180 cm kann man mit der Funktion $O(m) = 0{,}31 \cdot m^{0,425}$ berechnen."

Aufgaben

1 *Was passiert, wenn …*

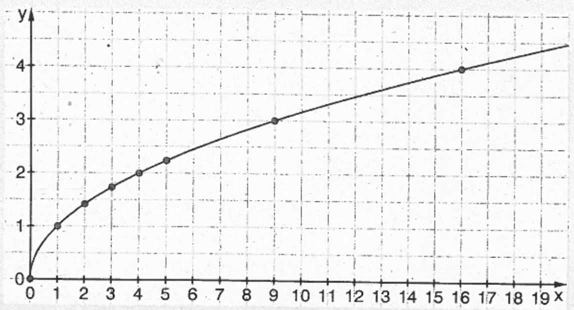


Untersuche, wie sich der Graph der Funktion $f(x) = x^z$ verändert, wenn man den Exponenten systematisch von −5 bis 5 mit der Schrittweite 1 verändert.
Bringe Ordnung in die Vielfalt. Verwende dabei die für Funktionen typischen Begriffe wie:
monoton fallend/wachsend, Symmetrie, Definitionsmenge, Wertemenge usw. Solltest du dich an diese Begriffe nicht mehr erinnern, so schaue bei „Erinnern und Wiederholen", am Ende dieses Buches nach.
Diese Aufgabe kannst du mit dem GTR oder mit einem anderen mathematischen Werkzeug bearbeiten.

2 *Anpassen einer Funktion $f(x) = x^r$ an Daten.*

a) Gegeben ist die Wertetabelle einer Funktion. Ahnst du bereits, wie die Funktionsgleichung lautet?

x	f(x)
0	0
1	1
2	1,41
3	1,73
4	2
5	2,24
9	3
16	4



> Tipp: für r auch Dezimalzahlen ausprobieren

b) Der Graph der Funktion ist im Koordinatenkreuz dargestellt.
Versuche r so zu wählen, dass $f(x) = x^r$ die Funktion darstellt, deren Tabelle und Graph angegeben ist.

Aufgaben

3 *Umkehrung einer Funktion*

Die Wertetabelle gehört zu der Funktion $f(x) = x^3$ mit $x \geq 0$.
a) Zeichne per Hand den Graphen dieser Funktion in ein Koordinatenkreuz. Verwende dabei auf x- und y-Achse die gleiche Skalierung.
b) Vertausche in der Tabelle die beiden Spalten und zeichne den zugehörigen Graphen in das gleiche Diagramm.
Was beobachtest du?
c) Probiere mit dem GTR aus, ob du einen Wert für r findest, so dass $f(x) = x^r$ die Tabelle mit den vertauschten Spalten modelliert.

x	$f(x) = x^3$
0	0
0,5	0,125
1	1
1,5	3,375
2	8
2,5	15,625
3	27

4 *Potenzen und seltsame Exponenten – Zur Wiederholung:*

a) Schreibe a^n mit Faktoren.
n ist eine natürliche Zahl
b) Berechne im Kopf 2^5 und 5^2.
c) Was versteht man unter a^{-n}, wenn n eine natürliche Zahl ist?
d) Schreibe als Bruch, ohne den GTR zu benutzen: 2^{-5} und 5^{-2}.
e) Rechenregeln für Potenzen: Wie werden Potenzen mit gleicher Basis multipliziert/dividiert? Wie werden Potenzen potenziert?

„Neuland"
Im Folgenden sollen die Rechenregeln aus Teil e) weiterhin gelten.

f) Offensichtlich muss dann $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$ gelten.

Welche Zahl muss man $5^{\frac{1}{2}}$ sinnvollerweise zuordnen?

Verfahre ähnlich, um herauszufinden, was $5^{\frac{1}{3}}$ sein könnte.

g) Setzt man den Gedanken aus Teil f) weiter fort, so ist $5^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{5}$.

Dann ist $5^{\frac{2}{3}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$. Verfahre genauso, um zu ermitteln, was $5^{0,4}$ sein könnte.

> $\sqrt[n]{a}$ ist die Zahl, die n mit sich selbst multipliziert a ergibt.

Basiswissen

Was man von Potenzen alles wissen sollte:

Positive ganzzahlige Exponenten	**Exponent 0**	**negative ganzzahlige Exponenten** mit $a \neq 0$
$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$	$a^0 = 1$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

rationale Exponenten mit $a \geq 0$ und m und n aus $\mathbb{N}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Rechenregeln: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert/dividiert, indem man die Basis beibehält und die Exponenten addiert/subtrahiert.
Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiele

A Zeige, dass 8 die 8. Wurzel aus 16 777 216 ist.

Lösung 1: mit dem TR
$8^8 = 16\,777\,216$

Lösung 2: mit dem TR
$\sqrt[8]{16\,777\,216} = 8$ oder $16\,777\,216^{\frac{1}{8}} = 8$