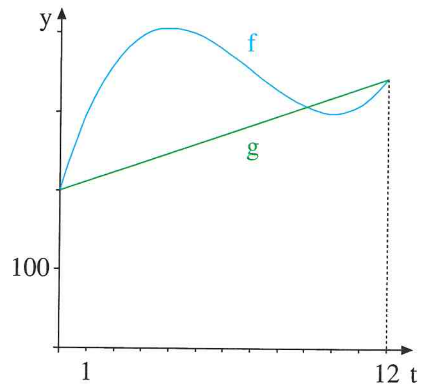
Übung 4

Der für den Verkauf zuständige Manager eines Unternehmens prognostiziert, dass sich der Umsatz in den folgenden 12 Monaten (August bis Juli des folgenden Jahres) durch die Funktion f mit $f(t) = t^3 - 21t^2 + 120t + 200$ (t in Monaten) beschreiben lässt.



a) Geben Sie den Zeitraum an, in dem nach dieser Prognose der Umsatz steigen bzw. fallen wird.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt innerhalb der 12 Monate, an dem sich der Umsatz am stärksten ändert.

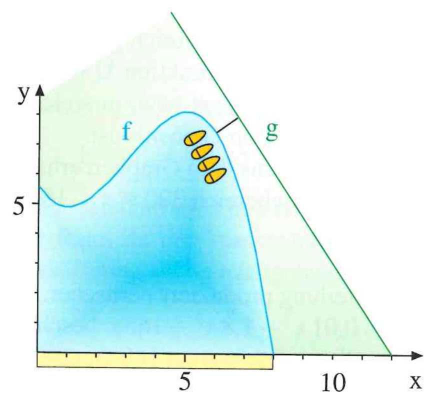
c) Erstellen Sie auf der Grundlage Ihrer Ergebnisse den Graphen der Funktion f.

d) Der Geschäftsführer ist vorsichtiger. Er nimmt an, dass der Umsatz während der betrachteten 12 Monate linear so ansteigt, dass am Anfang und am Ende des Beobachtungszeitraums die Verkaufszahlen beider Prognosen gleich sind. Welche Funktion g beschreibt den Umsatz nach dieser Prognose?

e) Für welchen Zeitpunkt sagen die beiden Prognosen denselben Umsatz voraus? Zu welchem Zeitpunkt ist der Unterschied der prognostizierten Umsatzzahlen am größten?

Übung 5

In einem Vergnügungspark wurde ein künstlicher See angelegt. Im Modell wird er begrenzt von der Koordinatenachsen und dem Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$.
Die Längeneinheit ist 100 Meter.



a) Längs der x-Achse verläuft am Ufer die Promenade. Wie lang ist sie?

b) An welchen Stellen der Promenade ist die vertikale Entfernung zum gegenüberliegenden Seeufer am größten bzw. am kleinsten? Geben Sie die maximale und die minimale Entfernung an.

c) Ein Weg verläuft längs des Graphen der Funktion $g(x) = -1{,}5x + 18$. Ein Anlegeplatz für Tretboote soll an der Uferstelle gebaut werden, an der die Entfernung zu diesem Weg am kleinsten ist. Berechnen Sie, wo dieser Anlegeplatz gebaut werden muss.

Zusammengesetzte Übungen

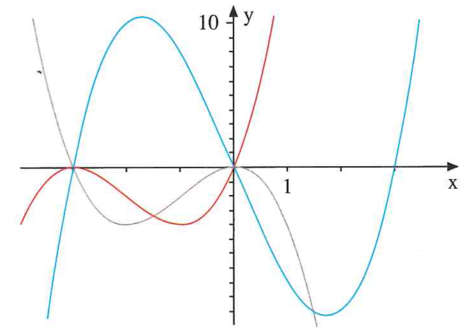
1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x \cdot (x-6)^2$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

b) Weisen Sie nach, dass die Gerade $g(x) = 6x$ Tangente an den Graphen der Funktion f ist. Welche zu g parallele Gerade ist ebenfalls Tangente an den Graphen von f?

c) Jede Ursprungsgerade hat mindestens einen Punkt mit dem Graphen von f gemeinsam. Ermitteln Sie die genaue Anzahl der gemeinsamen Punkte einer Ursprungsgerade mit dem Graphen von f in Abhängigkeit von der Geradensteigung.

2. Sei $f_1(x) = x^3 - 9x$, $f_2(x) = x \cdot (x+3)^2$, $f_3(x) = -x^2 \cdot (x+3)$.



a) Die Abbildung zeigt die Graphen der drei Funktionen. Ordnen Sie jeder Funktion den entsprechenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Sei $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. Bestimmen Sie die Nullstellen und Extrema von g. Skizzieren Sie den Graphen von g.

c) Begründen Sie, dass man den Graphen von g aus den vorgegebenen Graphen durch eine geeignete Spiegelung erhalten kann.

d) Welche Beziehung besteht damit zwischen den drei gegebenen Funktionen?

e) Welche Winkel bilden die Wendetangente an den Graphen von g und die Tangente an den Graphen von g in der Nullstelle links vom Ursprung miteinander?

3. Sei $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + c)$, $c \in \mathbb{R}$.

a) Wie muss c gewählt werden, damit $x_0 = 4$ eine Nullstelle von f ist? Welche weiteren Nullstellen hat die Funktion f?

b) Ermitteln Sie die Extrema und Wendepunkte der Funktion f.

c) Geben Sie alle Parabeln an, welche die gleichen Nullstellen wie die Funktion f haben. Welche dieser Parabeln hat ihren Scheitelpunkt auf der Winkelhalbierenden $y = x$?

d) Die Punkte S_1, S_2 und S_3 sind die gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. Welcher Punkt P ist von S_1, S_2 und S_3 gleich weit entfernt?

e) Der Punkt P bildet mit jeweils zwei der drei Achsenschnittpunkte S_1, S_2 und S_3 ein Dreieck. Welches dieser drei Dreiecke hat den größten Flächeninhalt?

4. Sei $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{16}{3}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f mithilfe einer Wertetabelle für $-5 \le x \le 1$.

b) Berechnen Sie die Extrema von f.

c) Wie lautet die Gleichung der Wendenormalen? In welchen weiteren Punkten schneidet die Wendenormale den Graphen von f?

d) Für $-5 \le x \le 0$ beschreibt der Graph von f modellhaft den Querschnitt einer Senke. Am tiefsten Punkt wird ein Osterfeuer angezündet. Beschreiben Sie, welche Punkte der Senke

5. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = (x^2 - 1)^2$ und $g(x) = -(x^2 - 1) \cdot (x + 1)$.

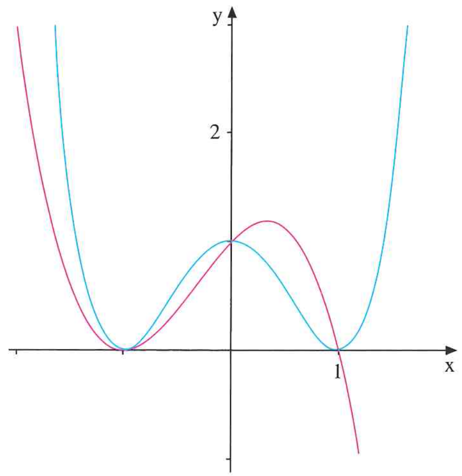
a) Untersuchen Sie die Graphen auf Symmetrie und identifizieren Sie welcher Graph zur Funktion f bzw. g gehört.

b) An den Graphen von g wird im Schnittpunkt P mit der y-Achse die Tangente gelegt. Wie lautet die Tangentengleichung?

c) Gibt es einen weiteren Punkt auf dem Graphen von g mit der gleichen Steigung wie im Punkt P?

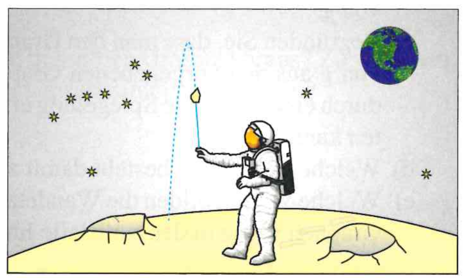
d) An welchen Stellen hat der Graph von g die Steigung -20?

e) Gibt es Stellen, an denen die Funktionen f und g die gleiche Steigung haben? Wie viele solche Stellen gibt es?



6. Wurf auf dem Mond

Auf dem Mond schleudert ein Astronaut einen Stein senkrecht nach oben. Seine Höhe über dem Boden kann durch die Funktion $f(t) = -0{,}8\,t^2 + 30\,t + 2$ beschrieben werden.
(t: Zeit in s; h: Höhe in m)



a) Wie hoch ist der Stein nach 1 s?

b) Nach welcher Zeit ist der Stein 50 m hoch?

c) Welche Gipfelhöhe erreicht der Stein?

d) Wie lang ist die Flugzeit des Steines?

e) Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Stein auf?

7. Wasserstand

Der Wasserstand eines Stausees kann während einer 100-tägigen Trockenperiode durch die quadratische Funktion $h(t) = \frac{1}{120}t^2 - 2t + 120 \quad (0 \le t \le 100)$ beschrieben werden (t in Tagen, h in m).

a) Fertigen Sie eine Skizze an.

b) Mit welcher Geschwindigkeit ändert sich der Wasserstand der Trockenperiode im Tagesmittel?

c) Mit welcher momentanen Geschwindigkeit ändert sich der Wasserstand am Anfang und in der Mitte der Trockenperiode?

8. Stabhochsprung

Die Höhe eines Stabhochspringers (Körperschwerpunkt) über dem Erdboden kann durch die Funktion $h(t) = -5\,t^2 + 9\,t + 1$ beschrieben werden (t in s, h in m, Mattenhöhe 50 cm).

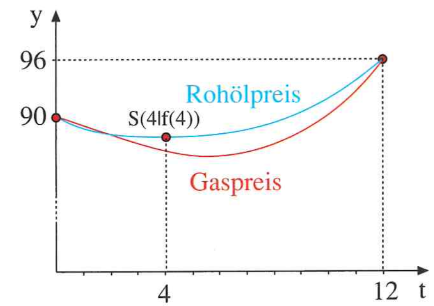
a) Wie lange dauert sein Flug?

b) Die Latte wird gerissen, wenn der Schwerpunkt beim Überqueren weniger als 30 cm über der Latte liegt. Reißt der Springer die Latte in 5 m Höhe?

c) Mit welcher Geschwindigkeit fällt er auf die Matte?

9. Erdöl und Gaspreise

Die Verläufe des Erdöl- und des Erdgaspreises können durch eine quadratische und eine kubische Parabel für einen Zeitraum von 12 Monaten modelliert werden. Erdölpreis in \$ pro Barrel, Gaspreis äquivalent. Der Erdgaspreis wird durch die Funktion $f(x) = 0{,}01\,x^3 - 0{,}94\,x + 90$ beschrieben.



a) Bestimmen Sie die Funktionsterm des Erdölpreises aus den Angaben in der Skizze.

b) In welchem Monat überholt der Öl- den Gaspreis?

c) Wie hoch waren die minimalen Preise jeweils im Jahresvergleich?

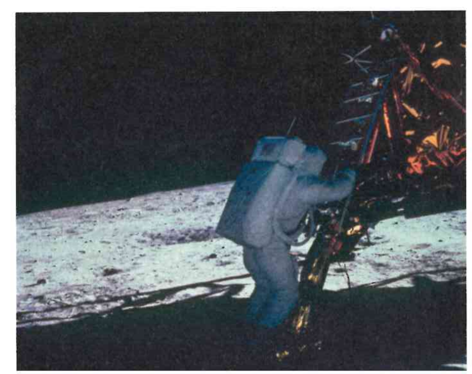
d) Wie hoch war die mittlere jährliche Preissteigerungsrate jeweils?

e) Wann war die momentane Preissteigerungsrate beim Erdgas maximal, wie hoch war sie?

f) Zu welchem Zeitpunkt war die Preisdifferenz Öl/Gas am größten?

10. Mondlander

Auf dem Mond gilt das Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = 0{,}8\,t^2$ (t: Fallzeit in s, s: Fallweg in m).



a) Wir groß ist die mittlere Geschwindigkeit eines frei fallenden Körper in der ersten Sekunde?

b) Welche Momentangeschwindigkeit hat der Körper zu Beginn der zweiten Fallsekunde?

c) Ein Astronaut stürzt von der 7,20 m hohen Einstiegsplattform der Lan-

11. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}5\,x^3 - 2\,x$.

a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und Symmetrie.
b) Bestimmen Sie die Extrema und die Wendepunkte von f.
c) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-2{,}5 < x < 2{,}5$.
d) Bestimmen Sie die Gleichungen der Nullstellentangenten.
e) Unter welchen Winkeln schneiden sich die Nullstellentangenten?
f) Mit welchem Faktor a muss f gestreckt werden, damit sich die Nullstellentangenten senkrecht schneiden?
g) Zeigen Sie: Die Extremalpunkte und der Wendepunkt liegen auf einer Geraden.

12. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 6{,}25\,x^2 + 9$.

a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und Symmetrie.
b) Bestimmen Sie die Extrema und die Wendepunkte von f.
c) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-2{,}5 < x < 2{,}5$.
d) Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten.
e) Die Wendetangenten bilden mit der x-Achse ein Dreieck.
Bestimmen Sie die Eckpunkte dieses Dreiecks.
Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.
f) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel g mit dem Scheitel $S(0\,|\,9)$ und den Nullstellen $x_1 = -1{,}5$ und $x_2 = 1{,}5$.
g) Zeigen Sie: Im Intervall $]-1{,}5;1{,}5[$ gilt: $f(x) \le g(x)$.
h) Vergleichen Sie die Steigungen von f und g auf dem Intervall $]-1{,}5;1{,}5[$.
Wo gilt $f' < g'$ bzw. $f' = g'$ bzw. $f' > g'$?

13. Gegeben sind $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{41}{4}$ und $g(x) = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{47}{8}$.

a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und Symmetrie.
b) Bestimmen Sie die Extrema und die Wendepunkte von f.
c) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3{,}5 < x < 3{,}5$.
d) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von f und g.
e) Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem.
f) Für welche x-Werte verlaufen die Graphen von f und g parallel?

14. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$.

a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.
b) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3{,}5 < x < 1{,}5$.
c) Für welche x-Werte ist die Steigung von f größer als 15?
d) Für welche x-Werte $(x > 0)$ unterscheiden sich die Funktionswerte von f und der Normalparabel $y = x^2$ um weniger als $\frac{1}{10}$?
e) Für welchen x-Wert $(x > 0)$ unterscheiden sich die Steigungen von f und der Normalparabel $y = x^2$ um weniger als $\frac{1}{10}$?
f) Für welchen x-Wert $(x > 0)$ ist der Unterschied der Funktionswerte sowie der Unterschied der Steigungen von f und der Normalparabel $y = x^2$ gleich groß?
Wie groß ist dieser Unterschied dann?

Überblick

Monotoniekriterium:
Die Funktion f sei auf dem Intervall I differenzierbar. Dann gilt:
Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ streng monoton steigend auf I.
Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ streng monoton fallend auf I.
Ist $f'(x) \ge 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ monoton steigend auf I.
Ist $f'(x) \le 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ monoton fallend auf I.

Krümmungskriterium:
Die Funktion f sei auf dem Intervall I zweimal differenzierbar. Dann gilt:
Gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I rechtsgekrümmt.
Gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I linksgekrümmt.

Das notwendige Kriterium für lokale Extrema:
Die Funktion f sei an der Stelle x_E differenzierbar. Dann gilt:
Wenn bei x_E ein lokales Extremum von f liegt, dann ist $f'(x_E) = 0$.

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema (f''-Kriterium):
Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_E zweimal differenzierbar. Dann gilt:
Gilt $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0$, so liegt an der Stelle x_E ein lokales Maximum von f.
Gilt $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$, so liegt an der Stelle x_E ein lokales Minimum von f.

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema (Vorzeichenwechselkriterium):
Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_E differenzierbar und es sei $f'(x_E) = 0$.
Wenn dann die Ableitung f' an der Stelle x_E einen Vorzeichenwechsel von + nach – hat, so liegt an der Stelle x_E ein lokales Maximum von f.
Hat f' an der Stelle x_E einen Vorzeichenwechsel von – nach +, so liegt an der Stelle x_E ein lokales Minimum von f.
Hat f' an der Stelle x_E keinen Vorzeichenwechsel, so liegt an der Stelle x_E ein Sattelpunkt von f.

Das notwendige Kriterium für Wendepunkte:
Die Funktion f sei an der Stelle x_W zweimal differenzierbar. Dann gilt:
Wenn bei x_W ein Wendepunkt von f liegt, dann ist $f''(x_W) = 0$.

Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte (f'''-Kriterium):
Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_W dreimal differenzierbar. Dann gilt:
Gilt $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \ne 0$, so liegt an der Stelle x_W ein Wendepunkt von f.

Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte (Vorzeichenwechselkriterium):
Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_W zweimal differenzierbar und es sei $f''(x_W) = 0$.
Wenn dann die zweite Ableitung f'' an der Stelle x_W einen Vorzeichenwechsel hat, so liegt dort eine Wendestelle von f.

Tangente an f in $P(x_0\,|\,f(x_0))$: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$